EXERCICE N°1

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\dfrac{2\sin x+1-\cos x}{x}$

1/ Montrer que pour tout $x<0$ on a : $\dfrac{4}{x}\le f(x)\le\dfrac{-2}{x}$; Déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2/ Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

3/ Montrer que f est prolongeable par continuité en 0

EXERCICE N°3

Soit f la fonction définie par $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3}+\sqrt{x^2-9} & \text{si } x\in[3;+\infty[\\ \dfrac{2\sin(x-3)}{x^2-3x} & \text{si } x\in]-\infty;0[\cup]0;3[\end{cases}$

1/ Donner le domaine de définition de f

2/ Montrer que f est continue sur $[3;+\infty[$

3/a) Calculer $\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$. f est-elle continue en 3 ?

b) Donner le domaine de continuité de f

4/a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b) Montrer que pour $x<0$, on a : $\dfrac{-2}{x^2-3x}\le f(x)\le\dfrac{2}{x^2-3x}$; En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

EXERCICE N°4

A chaque nombre complexe $Z\neq 2i$ on associe le nombre $Z'=\dfrac{iZ+1}{\overline{Z}+2i}$

1/a) On prend $Z=1+2i$ calculer alors Z ' et trouver sa forme exponentielle

b) Déterminer les nombres complexes tel que Z ' = i

2/ M, A et B sont les points d'affixes respectives Z, i et 2i

Montrer qu'on ait : $|iZ+1|=MA$ et $|\overline{Z}+2i|=MB$

En déduire l'ensemble $E=\{M(Z) \text{ tel que } |Z'|=1\}$

3/ On suppose que $Z=\tan\theta+2i$; $\theta\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$

Chercher en fonction de θ le module et argument de Z '

EXERCICE N°3

Soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases}u_0=1\\ u_{n+1}=\sqrt{\dfrac{1}{2}u_n^2+1} & ;\ \forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$

1/a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$ on a : $1\le u_n\le\sqrt{2}$

b) Montrer que la suite u est croissante

c) En déduire que la suite u est convergente et déterminer sa limite l

2/ on considère la suite v définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n=u_n^2-2$

a) Montrer que v est une suite géométrique
b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n
c) Retrouver la limite de la suite u